第 21 講　置換積分

21

［A］　定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{x\sqrt{x}} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+2)^3}{(x+1)^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx$

［B］　定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　置換積分

21　定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{4-x^2}\,dx$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 21 講　置換積分

21

［A］　定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{x\sqrt{x}}e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+2)^3}{(x+1)^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx$

［B］　定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx$

【答】　［A］　(1) 1　(2) $2e(e-1)$　(3) $5+3\log 2$　(4) $\log\dfrac{e+1}{2}$　(5) $\dfrac{1}{2}$

［B］　(1) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{e}{2}$　(2) $\dfrac{1}{4}$　(3) $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(4) $\dfrac{\pi}{8}$

【解説】　［A］　(1)　$x^2=t$ と置換すると，$2x=\dfrac{dt}{dx}$ より $x\,dx=\dfrac{1}{2}dt$ であり，

$\begin{cases} x=\sqrt{\pi} \text{ のとき } t=\pi \\ x=0 \text{ のとき } t=0 \end{cases}$　なので

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin t\,dt=\left[-\frac{1}{2}\cos t\right]_0^{\pi}=\mathbf{1}$$

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{x}}=t$ と置換すると，$-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}=\dfrac{dt}{dx}$ より $\dfrac{1}{x\sqrt{x}}dx=-2\,dt$ であり，

$\begin{cases} x=1 \text{ のとき } t=1 \\ x=\dfrac{1}{4} \text{ のとき } t=2 \end{cases}$　なので

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{x\sqrt{x}}e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}dx=\int_2^1(-2e^t)\,dt=\Big[-2e^t\Big]_2^1=\mathbf{2e(e-1)}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$x+1=t$ と置換すると，$1=\dfrac{dt}{dx}$ より $dx=dt$ であり，

$\begin{cases} x=1 \text{ のとき } t=2 \\ x=0 \text{ のとき } t=1 \end{cases}$ なので

$$\int_0^1 \frac{(x+2)^3}{(x+1)^2}dx=\int_1^2 \frac{(t+1)^3}{t^2}dt=\int_1^2\left(t+3+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt=\left[\frac{t^2}{2}+3t+3\log|t|-\frac{1}{t}\right]_1^2$$

$$=\mathbf{5+3\log 2}$$

(4)　$(e^x+1)'=e^x$ より $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx=\Big[\log(e^x+1)\Big]_0^1=\mathbf{\log\frac{e+1}{2}}$

(5)　$\log x=t$ と置換すると，$\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$ より $\dfrac{1}{x}dx=dt$ であり，

$\begin{cases} x=e \text{ のとき } t=1 \\ x=1 \text{ のとき } t=0 \end{cases}$ なので

$$\int_1^e \frac{\log x}{x}dx=\int_0^1 t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

［B］(1)　$\tan x=t$ と置換すると，$\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{dt}{dx}$ より $\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=dt$ であり，

$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4} \text{ のとき } t=1 \\ x=0 \text{ のとき } t=0 \end{cases}$ なので

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int_0^1 t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$ である．

よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\cdot\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\frac{1}{2}+\Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\mathbf{\frac{1}{2}\log\frac{e}{2}}$$

(2)　$\sin x=t$ と置換すると，$\cos x=\dfrac{dt}{dx}$ より $\cos x\,dx=dt$ であり，

$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2} \text{ のとき } t=1 \\ x=0 \text{ のとき } t=0 \end{cases}$ なので

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos x\,dx=\int_0^1 t^3dt=\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$x=2\sin\theta$ と置換すると，$\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$ より $dx=2\cos\theta\,d\theta$ であり，

$\begin{cases} x=1 \text{ のとき } \theta=\dfrac{\pi}{6} \\ x=0 \text{ のとき } \theta=0 \end{cases}$ なので

$$\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}\cdot 2\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}2|\cos\theta|\cdot 2\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}4\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}2(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\Big[2\theta+\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(4)　$x=2\tan\theta$ と置換すると，$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{2}{\cos^2\theta}$ より $dx=\dfrac{2}{\cos^2\theta}d\theta$ であり，

$\begin{cases} x=2 \text{ のとき } \theta=\dfrac{\pi}{4} \\ x=0 \text{ のとき } \theta=0 \end{cases}$ なので

$$\int_0^2\frac{1}{4+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\,d\theta=\Big[\frac{1}{2}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 21 講　置換積分

21　定積分を求めよ．

（1）$\displaystyle\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x}dx$

（2）$\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{4-x^2}\,dx$

【答】（1）$\dfrac{1}{3}$　（2）$\dfrac{8-3\sqrt{3}}{3}$

【解説】（1）$\log x=t$ と置換すると，$\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$ より $\dfrac{1}{x}dx=dt$ であり，

$\begin{cases} x=e \text{ のとき } t=1 \\ x=1 \text{ のとき } t=0 \end{cases}$ なので

$$\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x}dx=\int_0^1 t^2\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

（2）$4-x^2=t$ と置換すると，$-2x=\dfrac{dt}{dx}$ より $x\,dx=-\dfrac{1}{2}dt$ であり，

$\begin{cases} x=1 \text{ のとき } t=3 \\ x=0 \text{ のとき } t=4 \end{cases}$ なので

$$\int_0^1 x\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_4^3\left(-\frac{1}{2}\sqrt{t}\right)dt=\int_3^4\frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt=\left[\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_3^4=\mathbf{\frac{8-3\sqrt{3}}{3}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。